

Réalisé par : CHETBI JIHAD

**Encadré par: Mme. EL MKHALET
Mouna**

Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage



Plan :

1- Introduction : justification de choix / problématique et solution /quelques définitions

2- L'optimisation topologique : aspect général

3- Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage :explication de la méthode

4- Algorithme de résolution

5- élargissement

6- Applications à divers exemples de référence

7- Logiciels de l'optimisation Topologique

8- application au maroc

9-conclusion

10- références

INTRODUCTION

Dans la plupart des secteurs d'activités participant au processus de conception de structures, l'identification d'une structure optimale tient une place centrale. Cet optimisation porte généralement sur l'allègement des pièces tout en conservant certaines propriétés mécaniques telles que la rigidité ou la résistance du matériau. En pratique, deux contraintes mécaniques jouent un rôle déterminant pour la bonne tenue d'une structure. La première est relative à l'intégrité du matériau sous les efforts appliqués. La seconde contrainte mécanique révélatrice du comportement de la structure correspond à la résistance aux phénomènes dits de flambage. L'objectif de ce rapport est de présenter un algorithme d'optimisation topologique pour la conception de structures sous contrainte de flambage.

JUSTIFICATION DE CHOIX :

Dans le domaine de génie civil, l'identification de la meilleure structure selon divers critères mécaniques est prépondérante lors de la conception de ponts, de bâtiments,.....

Problématique et Solution :

Comment alors déterminer des structures innovantes avec la minimisation de la masse afin de réduire les coûts de fabrication? Une approche possible est basée sur la modélisation mathématique du problème de conception en termes de problème d'optimisation et sur sa résolution efficace. En particulier, l'optimisation topologique permet de découvrir des dispositions de matières que l'humain n'aurait pas pressenti.

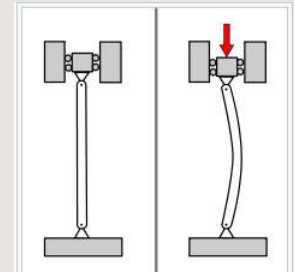
Quelques définitions

Types de discrétisation d'une structure

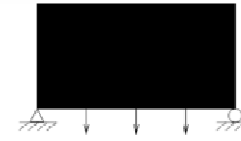
Au cours de l'optimisation, l'analyse du comportement de la structure peut être réalisée à travers une simulation numérique. L'une des principales techniques est basée sur la méthode des éléments finis, consistant à discrétiser la structure selon un type d'éléments qui peut être uni, bi ou tri-dimensionnel dont chaque extrémité est définie comme un noeud de la structure. Le résultat de cette discrétisation est appelée un maillage. Selon le type d'éléments finis utilisés, on distingue deux catégories de structures : d'une part les structures dites treillis, constituées d'éléments uni-dimensionnels, et d'autre part les structures dites continues, discrétisées à l'aide d'éléments bi et tri-dimensionnels.

Flambage

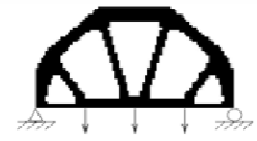
Le flambage ou flambement est un phénomène d'instabilité d'une structure élastique qui pour échapper à une charge importante exploite un mode de déformation non sollicité mais opposant moins de raideur à la charge.



Optimisation topologique



(a) Domaine initial



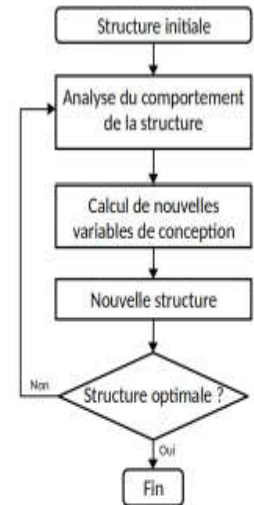
(b) Structure optimale

-On distingue trois types d'optimisations de structures : l'optimisation dimensionnelle, l'optimisation de forme et l'optimisation topologique.

-L'optimisation topologique consiste à rechercher, dans un espace de conception, la distribution optimale de matière représentant la structure.

-On estime que, pour des problèmes de conception courants, l'optimisation d'un critère de performance peut mener à des gains variant de 40 à 100 % avec l'optimisation topologique. Tandis que, dans le cas de l'optimisation dimensionnelle, les gains oscillent entre 5 et 10 % et entre 10 et 30 % pour de l'optimisation géométrique . Ainsi, l'optimisation topologique prend une place prépondérante lors de la conception de structures, notamment par sa capacité à proposer des designs optimaux innovants.

L'optimisation topologique a de nombreuses applications dans les domaines de l'aérospatiale, de la mécanique, de la biochimie et du génie civil.



Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage

nous portons notre attention sur l'optimisation de structures treillis, constituées de poutres, sous contrainte de flambage. L'objectif est de minimiser la masse en optimisant le nombre d'éléments structuraux et les dimensions des sections transversales associées. Dans un premier temps, nous explicitons l'analyse de flambage pour des structures à base de poutres. Ensuite, nous formulons le problème d'optimisation comme un problème d'optimisation non-linéaire en variables mixtes. Puis nous proposons une fonction objectif adaptée et un algorithme de résolution adapté au problème considéré. Enfin, sur un ensemble de problèmes issus de la littérature, nous illustrons les résultats numériques obtenus.

Pour l'analyse du flambement Nous sommes donc en mesure d'étudier le problème aux valeurs propres généralisé lié au flambage correspondant à :

$$(K + \lambda K\sigma)v = 0$$

où les valeurs propres λ correspondent à des facteurs scalaires de vecteur global des forces F , et les vecteurs propres v représentent les déformations de la structure correspondantes. La plus petite valeur propre positive λ_{cr} est appelée charge critique de flambage. Pour rappel, on dit qu'une structure résiste au flambage lorsque la valeur de λ_{cr} est supérieure à 1.

Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage

les éléments structuraux étant des poutres, une unique contrainte est nécessaire pour s'assurer que la structure ne flambe pas globalement et localement sous les efforts appliqués :

$$1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0$$

Cependant, avant d'observer un flambage local ou global, certaines zones de sections transversales présentant des épaisseurs fines peuvent flamber. Pour prévenir ce type de flambage, appelé aussi flambage de peau, nous définissons les contraintes pour un élément i :

$$z_i \cdot h_i(x) \leq 0$$

Avec : h_i : une fonction dépend du type de la section transversale.

z_i : associée à chaque élément i , pour indiquer sa présence dans la structure optimisée . $z_i = 1$ si i est présent . Sinon $z_i = 0$

Formulation du problème

Minimiser $f(x)$

$$x = \{z\} \in \{0, 1\}^N \times (\mathbb{R}^+)^{Np}$$

$$1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0 \quad \text{: flambage globale}$$

$$z_i \cdot h_i(x) \leq 0 \quad \text{: flambage de peau}$$

$$z_i \in \{0, 1\}; \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Optimisation topologique de structures sous contraintes de flambage

la minimisation de la masse de la structure est souvent considérée comme fonction objectif et est définie comme :

$$f(x) := \sum_{i=1}^N \rho l_i z_i A(d_i)$$

nous proposons une fonction objectif où les propriétés géométriques de chaque élément, et pas seulement la masse, sont utilisées pour définir le critère d'optimisation. Plus spécifiquement, nous proposons de minimiser la masse de la structure ainsi que la somme des moments d'inertie selon les axes y et z .

$$f(x) := \sum_{i=1}^N \rho z_i \left(l_i A(d_i) + \mu \frac{1}{\sum_{i=1}^N l_i} (I_y(d_i) + I_z(d_i)) \right)$$

Alors le problème non linéaire de minimisation devient :
Minimiser

$$f(x) := \sum_{i=1}^N \rho z_i \left(l_i A(d_i) + \mu \frac{1}{\sum_{i=1}^N l_i} (I_y(d_i) + I_z(d_i)) \right)$$

Minimiser $f(x)$

$1 - \lambda_{cr}(x) \leq 0$: flambage globale
 $z_i^* h_i(x) \leq 0$: flambage de peau
 $d_{min} \leq d_i \leq d_{max}$

$z_i \in \{0, 1\}; \forall i = 1, \dots, N$

Algorithme de résolution

A l'état initial, tous les éléments sont considérés présents dans la structure (cela correspond à $z = 1$). Dans un premier temps, les valeurs des variables z sont fixées et le problème avec les variables continues d est résolu. C'est un problème non-linéaire. donnant les dimensions d optimales des sections transversales des éléments présents dans la structure. Dans une seconde étape, à partir de la solution, nous traitons de nouveau les variables binaires. Estimer les valeurs des variables binaires z revient à étudier la suppression des éléments structuraux (fixer $z_i = 0$ correspond à la suppression de l'élément i). Ici, une méthode pour supprimer les éléments un par un est présentée. Lorsqu'un élément structural est enlevé, une nouvelle disposition de poutres est obtenue et les deux étapes précédentes sont répétées. Afin de déterminer la vraie influence de chaque élément, nous devons déterminer les dimensions optimales des sections transversales associées. Pour rappel, la résolution du problème non-linéaire pour une configuration de structure donnée, nous donne les dimensions d optimales des sections transversales. A partir de ce résultat, un ensemble S de poutres, dont les aires des sections transversales sont plus petites ou égales à un seuil AT , peut être défini :

$$S := \{i \mid A(d_i) \leq AT\}$$

Ensuite, pour chaque élément i de S , nous estimons l'impact de la présence de l'élément i par une analyse de sensibilité sur la charge critique de flambage λ_{cr} :

$$\alpha_i := \lambda_{cr}(d, z_1, \dots, z_i = 0, \dots, z_m) - \lambda_{cr}(d, z_1, \dots, z_i = 1, \dots, z_m), \forall i \in S$$

où le premier et le second terme correspondent respectivement à la charge critique de flambage de la structure lorsque l'élément i est absent et présent. Alors l'élément e , qui maximise α_i , est supprimé de la structure (i.e. nous fixons $z_e = 0$) Avec : $e := \operatorname{argmax} \alpha_i$

Une fois qu'un élément a été supprimé, nous obtenons une nouvelle structure sur laquelle on répète le même procédé. A l'état initial, la valeur du seuil AT est égale à l'aire minimale définie par les bornes sur les dimensions des sections transversales.

Algorithme de résolution

La procédure proposée est présentée dans l'Algorithme :

input: $dmin, dmax, \sigma^-$ et ρ
Initialisation : $z = \{1\}^m$ et AT .
Résoudre (P')
Calcul de la masse structurale m selon z et d
 $m^* \leftarrow m$; $z^* \leftarrow z$ et $d^* \leftarrow d$
for $j = 1, 2$ **do**
 Construire $S := \{i \mid A(di) \leq j \times AT\}$
 while $S \neq \emptyset$ **do**
 Calcul des sensibilités ai
 Déterminer $e = \operatorname{argmax}_{aii \in S}$
 Fixer $ze \leftarrow 0$
 Résoudre (P')
 Calcul de la masse structurale m selon z et d
 if $m \leq m^*$ **then**
 $m^* \leftarrow m$; $z^* \leftarrow z$ et $d^* \leftarrow d$
 end if
 Construire $S := \{i \mid A(di) \leq j \times AT\}$
 end while
end for
output: m^*, z^* et d^*

(P') :
Minimiser $f(x)$

$1 - \lambda cr(x) \leq 0$:flambage globale
 $z_i^* h_i(x) \leq 0$:flambage de peau
 $dmin \leq di \leq dmax$

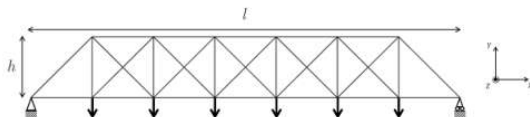
$z_i \in \{0, 1\}; \forall i = 1, \dots, N$

Applications à divers exemples de référence

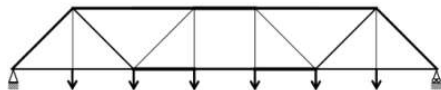
Masse structurale optimale (kg) et temps de calcul (s) pour chaque problème et chaque section transversale

Problèmes	Section transversale creuse							
	Carré		Circulaire		Rectangulaire		ellipsoïdale	
	Masse	Temps	Masse	Temps	Masse	Temps	Masse	Temps
Structure en L	253.61	230	252.74	232	249.12	605	246.93	602
Triangle	62.55	10	62.15	13	62.02	23	61.46	25
Pont	163.84	36	164.90	35	159.68	57	159.65	59
Tour	43.01	13	43.62	14	40.68	35	40.5	33
Structure 3D	487.1	20	489.07	19	482.04	45	482.53	48

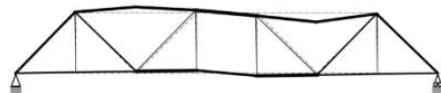
illustration de problème de pont



(a) Structure initiale



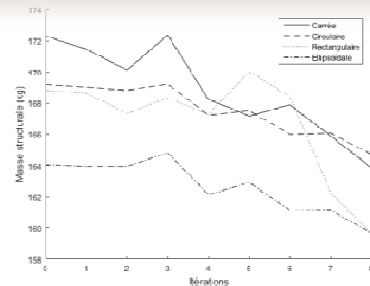
(b) Structure optimale



(c) Mode de flambage

TABLE 4.9 – Nombre de variables continues et entières à l'état initial

Problème	Variables continues selon la section transversale		Variables Entières
	Carré et Circulaire	Rectangulaire et Ellipsoïdale	
Structure en L	172	344	86
Tri	44	88	22
Pont	60	120	30
Tour	64	128	32
Structure 3D	64	128	32



(d) Evolution de la masse structurale pour les différentes sections transversales

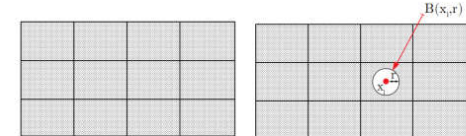
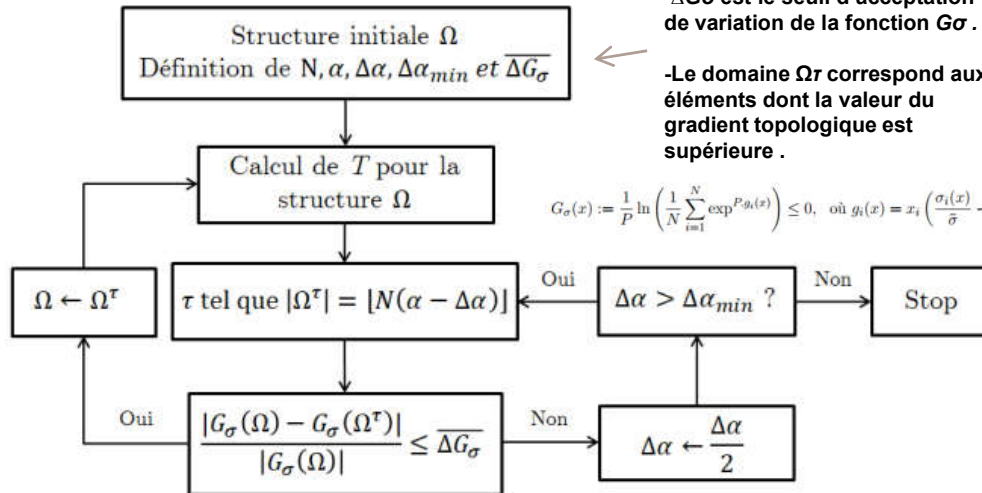
Elargissement

l'optimisation topologique est utilisable aussi pour les structures continue a l'aide Méthode du gradient topologique : la notion de gradient topologique quantifie l'influence sur un critère d'optimisation de l'insertion d'un trou dans une structure .l'état initial, le domaine de conception est considéré rempli de matière .On dit que la fraction de volume α occupé est de 1. Ensuite, l'objectif est de supprimer successivement des fractions de volume $\Delta\alpha$ à partir des champs des gradients topologiques.

$-\Delta G_\sigma$ est le seuil d'acceptation de variation de la fonction G_σ .

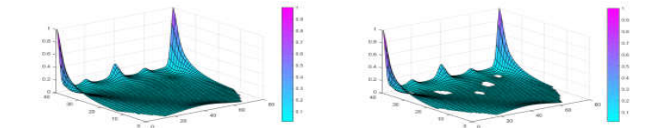
-Le domaine Ω^τ correspond aux éléments dont la valeur du gradient topologique est supérieure .

$$G_\sigma(x) := \frac{1}{P} \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp^{P g_i(x)} \right) \leq 0, \quad \text{où } g_i(x) = x_i \left(\frac{\sigma_i(x)}{\bar{\sigma}} - 1 \right)$$

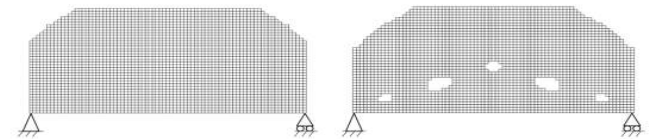


(a) Structure Ω (b) Structure Ω_B

FIGURE 5.4 – Concept du gradient topologique



(a) Champ T des gradients topologiques engendré par $\Delta\alpha = 0.05$ (b) Champ T des gradients topologiques engendré par $\Delta\alpha = 0.1$

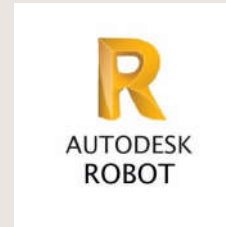


(c) Domaine engendré par $\Delta\alpha = 0.05$ (d) Domaine engendré par $\Delta\alpha = 0.1$

Logiciels de l'optimisation Topologique

L'optimisation topologique permet de déterminer la forme et la répartition de matière la plus efficace en fonction du matériau défini et des contraintes. La forme générée, tout à la fois plus légère et plus rigide, a un aspect organique et nécessite moins de matière. Ceci est un enjeu majeur dans les domaines de l'aéronautique, le médical, l'automobile, le Génie civil ou la machine spéciale. Generative design est la réponse dont les bureaux d'études, les designers et les architectes ont besoin afin de concevoir rapidement et facilement des produits efficaces grâce à une nouvelle façon de concevoir des formes.

Exemples des logiciels de l'OT



Application au Maroc

- Dans le Maroc, comme dans le monde entier, l'optimisation topologique des structures est une technique fréquemment utilisé et qui a trop évolué dans ces dernières années Parce que de nombreux logiciels ont été développés dans ce sens .
- Cette technique est fortement utilisée dans le secteur de Genie civil et de mécanique au Maroc, beaucoup de bureau d'études de fabrication utilisent l'optimisation topologique à l'aide de Solidworks et Robobat afin d'avoir une structure performante avec un minimum de masse .

Conclusion

Dans cette présentation , nous avons étudié un problème d'optimisation d'une structure , sous des contraintes de flambage. Nous avons présenté :

- A travers une formulation non-linéaire en variables mixtes, nous avons proposé une fonction coût reposant sur une somme pondérée de la masse et des moments d'inertie de chaque élément.
- Un algorithme a été développé, basé d'un côté, sur un problème non-linéaire pour optimiser les dimensions des sections transversales des poutres, et de l'autre sur un critère utilisant une analyse de sensibilité de la charge critique de flambage pour supprimer un par un les éléments de la structure.

-Les résultats numériques, sur un ensemble d'exemples de la littérature, montrent que l'augmentation du nombre de degrés de liberté décrivant l'aire des sections transversales mène à des réductions de masse structurale jusqu'à 7,15%.



Références :

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKewiY4tPVpOnvAhVBVRUIHbgGBrgQFjACegQIAxAD&url=http%3A%2F%2Fwww.cmapx.polytechnique.fr%2F-allaire%2Fcray%2Fplaq.html&usg=AOvVaw2fLN0G3MII6AunKWOQUWB>

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKewijz73spOnvAhV3ZxUIHXhKAocQFjAKegQIIRAD&url=https%3A%2F%2Fhal.archives-ouvertes.fr%2Fhal-01236570%2Fdocument&usg=AOvVaw2-vj19YHgP7-k6D1PybAD7>

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjhzLv6pOnvAhWlsXEKHfUFAAEQFjACegQIBBAD&url=https%3A%2F%2Ffr.wikipedia.org%2Fwiki%2FOptimisation%2Ftopologique&usg=AOvVaw2DRK7jIirJVnw5B9Klxsfe>

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwje0YaGpenvAhXYSRUIHbyxD6cQFjAAegQIBBAD&url=https%3A%2F%2Fhal.archives-ouvertes.fr%2Ftel-02063761%2Fdocument&usg=AOvVaw0ao2YfPrqvYrSR5efNX9ZI>

<https://mode2016.sciencesconf.org/file/Mode2016%20TLSE%20Mitjana.pdf>

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwje0YaGpenvAhXYSRUIHbyxD6cQFjAlegQICBAD&url=https%3A%2F%2Fpublications.polymtl.ca%2F2732%2F1%2F2017%2FValerianVuillon.pdf&usg=AOvVaw26V4GbOjd2vB6NLPvNBvM>